*

En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn.

*

Morten Rognes

1987

*

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§ 0.1 Om vitenskapslogikk

Vitenskapslogikk kan sies å være studiet av de logiske relasjonene som består mellom utsagn, utsagnsmengder og forskjellige strukturer av en mer spesiell art som angår utsagn. En sammenligning – som ikke bør presses for langt – kan foretas med geometrien. På samme måte som en geometriker tar sitt utgangspunkt i området av romlige punkter og visse grunnleggende relasjoner mellom disse, for dernest å studere, – på en rent logisk og matematisk basis, og med det for øye å nå frem til allmenne setninger av interessant karakter –, egenskapene til mer eller mindre kompliserte geometriske strukturer, f.eks. punktmengder som linjer, sirkler, polygoner, kjeglesnitt osv., på lignende vis tar vitenskapslogikeren sitt utgangspunkt i området av utsagn og utsagnsmengder samt bestemte grunnleggende relasjoner mellom disse: f. eks. logisk ekvivalens og logisk konsekvens. Dernest søker vedkommende å studere egenskapene til mer kompliserte strukturer. Eksempler kan være konsistente, maksimalt konsistente og fullstendige utsagns-systemer. Men det kan også dreie seg om deduktivt lukkede utsagnsmengder samt en lang rekke andre størrelser. På samme måte som i geometrien forsøker man så å utvikle allmenne setninger om disse strukturene med det for øye å nå frem til en avrundet og harmonisk lærebygning. Denne skal da gi en et innblikk i, og en mer helhetlig forståelse av, de sammenhenger som består mellom de ulike strukturer og begreper.

I lys av det som så langt er sagt synes det rimelig å karakterisere vitenskapslogikken som en rent logisk disiplin. Man studerer ikke de prosesser av psykologisk og samfunnsmessig art som leder frem til formuleringen av bestemte teorier. Man legger heller ikke vekt på historiske spørsmål, som f.eks. under hvilke omstendigheter en teori ble utviklet, hvem som utviklet den og på hvilken måte, eller hvilke betingelser av historisk art som muliggjorde utviklingen. Heller ikke beskjeftiger man seg i vitenskapslogikken med spørsmål om f.eks. hvordan utviklingen av visse teorier kan gi opphav til metodologiske og filosofiske synspunkter som kan bidra til å forsterke samfunnsmessige ulikheter og skjevheter dersom de brer seg i større forskningsmiljøer. Kort sagt, som disiplin er vitenskapslogikken adskilt fra slike disipliner som forskningspsyko-logien, vitenskapssosiologien, idehistorien og studiet av de ideologier som kan tenkes å oppstå i vitenskapens kjølvann.

Det synspunkt kan fremsettes at vitenskapslogikken snarere er en mer fundamental disiplin enn de andre nevnte disipliner. Inn under vitenskapslogikken faller studiet av begrunnelseskjeder og argumenter generelt. Synspunkter på begrunnelse trengs om man ønsker å vurdere sannhetsgehalten til, la oss si, en vitenskapssosiologisk teori, f. eks. om man ønsker å vurdere om den kan anses som godt begrunnet i lys av foreliggende data. Derimot synes teorier hentet fra de andre områder å ha mindre relevans for oppstillingen og vurderingen av vitenskapslogiske teorier. Forholdet synes ikke å være helt symmetrisk i dette henseende.

§ 0.2 Et eksempel på en vitenskapslogisk teori.

Som et eksempel på en vitenskapslogisk teori nevner vi teorien T;1 som vi har definert, og delvis utviklet, i vårt arbeid "En teori om presise deskriptive utsagn", Rognes [1]. Dette er en første ordens teori som ved siden av de rent logiske uttrykk, dvs. de setningslogiske konnektivene, kvantorene og identitetspredikatet, inneholder to mengdeteoretiske predikater, nemlig "x er en mengde" og "x er et element i mengden y", samt

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

tre ikke-logiske predikater av vitenskapslogisk relevans: "x er et utsagn", "x er en mulig verden" og "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant". Språket til teorien T;1 er altså det første-ordens språket som inneholder de nevnte logiske uttrykk og de nevnte ikke-logiske predikater. De grunnleggende setningene i teorien er de følgende: For det første et standard aksiomsett for første-ordens logikk med identitet. Videre inneholder teorien et aksiomsett for de mengdeteoretiske predikatene som er en tilrettelegging av de vanlige ZFC-aksiomene i vår sammenheng. Endelig inngår i teorien fire grunnleggende aksiomer for de tre sistnevnte predikatene, "x er et utsagn", "x er en mulig verden" og "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant".

Teorien er eksakt definert og utførlig beskrevet i Rognes [1]. Det mengdeteoretiske grunnlaget er det gjort rede for i Rognes [2], [3]. I det følgende forutsettes det at leseren er fullt fortrolig med disse arbeidene. Vi vil også uten særskilte bemerkninger arbeide med den notasjon og terminologi som er innført i dem. Vi nevner her bare at "L;e" betegner det første-ordens språket med identitet som inneholder som eneste ikke-logiske symboler konstruksjonene "x er en mengde" og "x er et element i mengden y". Disse to predikatene forkortes med "M(x)" og "xêy". Videre betegner "Δ;0" den mengden med predikater som inneholder nøyaktig de følgende tre konstruksjoner – som forøvrig ble nevnt ovenfor – nemlig: "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant". Disse tre konstruksjonene forkortes med henholdsvis "MV(x)", "Ut(x)" og "True(x,y)". Utvides så språket for mengdelære med konstruksjonene i Δ;0 får man et noe rikere språk som vi betegner med L;e[Δ;0]. Dette er da språket til teorien T;1.

§ 0.3 Andre eksempler på teorier av vitenskapslogisk natur.

Man kan også gi andre eksempler på teorier av vitenskapslogisk natur. Utvides for eksempel L;e[Δ;0] med ytterligere endel kontruksjoner: "x er en egenskap av grad y", "x er et mulig individ" og "x er et objekt som har egenskapen y i verdenen w" får man et språk som er rikere enn L;e[Δ;0]. Man kan utvide språket til T;1 til dette nye språket og føye til nye aksiomer for de nevnte konstruksjonene. I Rognes [4] har vi betraktet, definert og delvis utviklet tre slike teorier: E;1 – E;3. Også disse teoriene synes det naturlig å oppfatte som vitenskapslogiske.

§ 0.4 Målet med dette essay.

Målet i dette essayet er å utvikle teorien T;1 videre. Dette vil skje på den måten at vi vil innføre en rekke nye konstruksjoner i tillegg til dem som inngår i L;e[Δ;0]. Disse vil så bli definert. På grunnlag av slutningsreglene og grunnsetningene i T;1 utledes så en rekke setninger om de begreper som uttrykkes av de nye konstruksjonene. La oss på dette punkt gi en oversikt over hvilke konstruksjoner det dreier seg om ved å lage en liste over dem. Vi har i tankene:

(1) "x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden til Δ"
(2) "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnet y"
(3) "x er et utsagn som er logisk ekvivalent med utsagnet y"
(4) "x er en utsagnsmengde som er logisk ekvivalent med utsagnsmengden y"
(5) "x er en teori"
(6) "x er konsekvensmengden til utsagnsmengden y"
(7) "x er en deduktivt lukket utsagnsmengde"

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

(8) "x er en konsistent utsagnsmengde"
(9) "x er en maksimalt konsistent utsagnsmengde"
(10) "x er en fullstendig teori"
(11) "x er en uavhengig utsagnsmengde"
(12) "x er en strengt uavhengig utsagnsmengde"

Dette avslutter listen over konstrukjoner som i første omgang vil bli betraktet.

La nå Δ;2 være den konstruksjonsmengden man får når Δ;0 utvides med predikatene (1) – (12) ovenfor og betrakt språket L;e[Δ;2]. Siden konstruksjonene i Δ;2 intuitivt sett virker meningsfulle kan vi i dette språket formulere en uendelighet av setninger som inneholder dem. Blandt alle disse setningene vil det være noen som virker rimelige mens andre mer eller mindre umiddelbart fortoner seg som usanne. Hvis vi nå ønsker å gi definisjoner av konstruksjonene i Δ;2–Δ;0 ved hjelp av de predikater som inngår i L;e[Δ;0], er det derfor naturlig å forsøke å formulere definisjonene slik at man ved hjelp av dem og grunnsetningene i T;1 kan utlede flest mulige av de setningene i L;e[Δ;2] som intuitivt sett virker rimelige og flest mulig av negasjonene til de setningene i L;[Δ;2] som virker urimelige.

I det følgende vil det bli presentert en rekke med definisjoner av predikatene (1) – (12) ovenfor. Disse definisjonene vil i noen utstrekning bli drøftet i lys av de krav som nettopp ble nevnt.

§1 Begrepet logisk konsekvens.

Vi starter med predikatet "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ". Er dette predikatet sant om et ordnet par <x,Δ> virker det rimelig å anta at x er et utsagn i den betydningen vi tidligere har antydet og at Δ er en mengde med slike utsagn. Videre virker det umiddelbart plausibelt å anta at x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ dersom det er logisk umulig å anta at alle utsagnene i Δ er sanne og samtidig at utsagnet x er usant. Det omvendte virker også rimelig: Er det logisk umulig å anta at alle utsagnene i Δ er sanne og samtidig at negasjonen av utsagnet x er sant synes x å måtte kunne regnes som en logisk konsekvens av utsagnene i Δ. Under hvilke omstendigheter er det så i sin tur rimelig å si at det er logisk umulig å anta at alle utsagnene i Δ er sanne og negasjonen av x sann? Den betingelsen at utsagnet x er sant i alle de logisk mulige verdener hvor alle utsagnene i Δ er sanne synes å være en såvel tilstrekkelig, som nødvendig, betingelse for dette. Dette motiverer den følgende definisjon: Vi sier at utsagnet x er en logisk konsekvens av utsagnene i Δ, i symboler "LK;m(x,Δ)" hvis og bare hvis x er et utsagn som er sant i enhver mulig verden hvor alle utsagnene i Δ er sanne. I symboler kan denne definisjonen formulere slik:

Definisjon 1.1 $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow [x \hat{e} U \ \& \ \Delta \text{ Inkl } U \ \& \ M(\Delta) \ \& \ (Aw)(w \hat{e} I \ \& \ (Ay)(y \hat{e} \Delta \rightarrow True(w,y)) \rightarrow True(x,w))]$

Ved siden av at denne definisjonen umiddelbart virker plausibel i lys av overlegningene ovenfor kan det også nevnes at vi ikke har greid å utlede noe tilsynelatende urimelig fra den om den legges til T;1 alene, eller om den legges til en versjon av T;1 der T;1 utvides med andre prinsipper det er grunn til å tro på. Dette kan regnes, om enn noe indirekte, som evidens til fordel for definisjonen.

Den logiske konsekvensrelasjonen som er innført ovenfor er en relasjon mellom utsagn og utsagnsmengder. Denne definisjonen kan sammenlignes med den vanlige

konsekvensrelasjon som ofte defineres i forbindelse med første-ordens språk (og forøvrig andre typer av språk). Ifølge denne sies en setning S å være en logisk konsekvens av en mengde med setninger D i et første-ordens språk L hvis og bare hvis S er en setning som er sann i enhver modell for L hvor alle setningene i D er sanne. Modeller for et første-ordens språk vil da, om de oppfattes på vanlig måte, være en klasse av mengdeteoretiske strukturer som kan avgrenses helt presist. Identifiserer man tentativt mengden av utsagn med mengden av utsagn i et gitt første-ordens språk L, mengden av mulige verdener med mengden av modeller for L og endelig sannhetsrelasjonen mellom utsagn og mulige verdener med relasjonen "sannhet i en modell for L", ser man at vår definisjon umiddelbart fremkommer fra den klassiske modellteoretiske definisjonen. Mao. er det en tydelig formell analogi mellom de to definisjonene selvom de begreper som avgrenses er forskjellige. Som konklusjon synes det derfor nærliggende å hevde at den definisjon av logisk konsekvens vi har formulert er plausibel. Den avspeiler på en naturlig måte de intuisjoner vi har om denne relasjonen, i den utstrekning den oppfattes som en relasjon mellom utsagn.

§1.1 Om hva som menes med at et enkeltutsagn er en logisk konsekvens av et annet enkeltutsagn.

La oss så se på den andre konstruksjonen på listen som ble oppført i §0.4. Det dreier seg om to-plass predikatet "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnet y". Det mest naturlige i forbindelse med denne relajonen er vel å si at et utsagn x er en logisk konsekvens av et annet utsagn y hvis og bare hvis det første utsagn er sant i enhver mulig verden hvor y er sant. Man ser lett at denne definisjonen er ekvivalent med den som fremkommer om vi i definisjonen av "LK;m(x,Δ)" i §1 setter Δ={y}. Med andre ord er x en logisk konsekvens av y hvis og bare hvis x er en logisk konsekvens av utsagnene i den utsagnsmengden som bare inneholder y, dvs. {y}. I det følgende brukes "LK(x,y)" som forkortelse for "x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnet y". Den definisjonen som nettopp har blitt gitt kan så formuleres slik ved hjelp av symboler:

Definisjon 1.1.1 LK(x,y) <–> (x,yêU & (Aw)(wêI & True(w,y) –> True(w,x)))

§2 Begrepet logisk ekvivalens.

Logisk ekvivalens synes vanligvis å innebære det samme som gjensidig logisk implikasjon. Et utsagn x er altså logisk ekvivalent med et annet utsagn y dersom og bare dersom x er en logisk konsekvens av y og omvendt. Bruker vi "LEkv(x,y)" som forkortelse for "utsagnet x er logisk ekvivalent med utsagnet y" synes derfor den følgende definisjon å være svært ukontroversiell og skulle vel neppe trenge noen ytterligere kommentarer:

Definisjon 2.1 LEkv(x,y) <–> (LK(x,y) & LK(y,x))

Det virker rimelig å utvide begrepet logisk ekvivalens til utsagnsmengder. I så tilfelle er det naturlig å stipulere at en utsagnsmengde Δ;1 er logisk ekvivalent med en utsagnsmengde Δ;2, i symboler "LEkv;m(Δ;1,Δ;2)", hvis og bare hvis alle utsagnene i mengden Δ;1 er logiske konsekvenser av dem i Δ;2, og omvendt: alle utsagnene i Δ;2 er logiske konsekvenser av utsagnene i mengden Δ;1. Formelt kan denne definisjonen formuleres slik:

Definisjon 2.2 LEkv;m(Δ;1,Δ;2) <–> (Δ;1,Δ;2êPt(U) &

(Ax)(xêΔ;1 –> LK;m(x,Δ;2)) & (Ax)(xêΔ;2 –> LK;m(x,Δ;1))

Vi har vanskelig for å se at det kan rettes noen alvorlige innvendinger mot denne definisjonen som på en naturlig måte synes å gjenspeile det som vanligvis menes med logisk ekvivalens når det er utsagnsmengder det dreier seg om.

§3 Teoribegrepet.

Men en *teori* forstås her en hvilken som helst utsagnsmengde. Brukes "Teori(x)" som forkortelse for uttrykket "x er en teori" kan denne definisjonen formuleres slik:

Definisjon 3.1 Teori(x) <–> xêPt(U)

Denne definisjonen trenger imidlertid en rekke kommentarer. Ordet "teori" synes å bli brukt i noe forskjellige betydninger i vanlig, uformell tale, men også i mer faglige, logiske og filosofiske sammenhenger. Av og til synes det å bli brukt i en nokså snever betydning, særlig i visse vitnskapsfilosofiske skrifter, og har da en betydning som synes å ligge nokså nær opp til uttrykket "system av generelle påstander av lovkarakter der påstandene er systematisert og deres innbyrdes sammenheng klargjort". I denne betydning vil teorier ikke kunne inneholde singulære utsagn eller påstander. Av og til synes imidlertid uttrykket også å brukes i en videre, mindre snever, betydning og betyr da noe i retning av "helhet av påstander eller oppfatninger der den indre sammenheng mellom oppfatningene er klargjort". Det stilles også noen ganger det krav til en teori at de påstandene som inngår i teorien skal være velbekreftet, veletablerte eller sikre. Endelig synes ordet "teori" også å bli brukt i en rekke mer teknisk betonte betydninger, f. eks. synonymt med "formalisert og intepretert aksiomatisk system". Den definisjonen vi har angitt ovenfor er ment som en rent stipulativ definisjon, mao. bruker vi ordet "teori" som forkortelse for det lengere uttrykket "mengde av utsagn", eller mer nøyaktig: "mengde av presise deskriptive utsagn". Det er altså ikke vår hensikt å diskutere spørsmålet om teorier egentlig, eller dypest sett, er utsagnsmengder. Vi finner imidlertid at den terminologi vi har innført ikke er misvisende og at den ikke gir noen uheldige assosiasjoner. Defineres "teori" så omfattende som vi har gjort kan man senere etter behov avgrense mer spesielle teorimengder, f.eks. klassen av de teorier som er deduktivt lukket, klassen av de teorier som er aksiomatiserbare, og man kan betrakte de utsagnsmengder hvor utsagnene er nøyaktig dem som uttrykkes av alle teoremene i et formalisert og intepretert aksiomatisk system. Man kan altså avgrense mer spesielle teoribegreper hvor ekstensjonen approksimerer ekstensjonen til de teoribegreper som ble antydet ovenfor. Dette viser at vår definisjon ikke er vilkårlig valgt og at den er formålstjenlig når man, slik som her, ønsker å fremstille grunntrekkene i en allmenn teori om utsagnsystemer.

§4 Konsekvenssystemet til en mengde av utsagn.

Det ligger i selve uttrykket "konsekvensmengden til en utsagnsmengde" at dette betegner en mengde med utsagn Δ' og at utsagnene i denne mengden utgjøres av alle de utsagn som er logiske konsekvenser av dem i Δ. Uttrykket "k(Δ)" brukes her som forkortelse for uttrykket "konsekvensmengden til utsagnsmengden Δ". Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 4.1 k(Δ) = Mg(y: yêU & LK;m(y,Δ))

Er Δ en utsagnsmengde, og er denne slik at ethvert utsagn som er en logisk konsekvens av en delmengde av Δ selv er med i denne mengden, vil vi her kalle Δ for en *deduktivt lukket utsagnsmengde*. Dette synes å være i overenstemmelse med vanlig terminologi. Uttrykket "DCL(Δ)" brukes som forkortelse for det lengere uttrykket "Δ er en deduktivt lukket utsagnsmengde", og vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 4.2 DCL(Δ) <–> (Δ Inkl U & M(Δ) &
(Ay)(M(y) & y Inkl Δ –>(Ax)(xêU & LK;m(x,y) –> xêΔ)))

Grunnen til at vi her introduserer konsekvensmengde-operasjonen k, som til enhver utsagnsmengde tilordner dens konsekvensmengde, og begrepet om deduktivt lukkede utsagnsmengder, er at det synes svært naturlig å betrakte disse to strukturene i forbindelse med den logiske konsekvensrelasjon. Dessuten har disse to begrepene egenskaper som har interesse i seg selv.

La oss på dette punkt komme med noen rent terminologiske bemerkninger. I stedet for uttrykket "x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ" vil vi ofte bruke utrykksmåtene "x er logisk sett implisert av utsagnene i mengden Δ", "x er logisk sett deduserbar fra utsagnene i mengden Δ" eller "Δ impliserer x". Også en del andre lignende uttrykk vil bli brukt. Dette innebærer at disse uttrykkene brukes synonymt. Det skulle være en selvfølge at disse konvensjonene blir innført for å gi anledning til en mer, stilistisk sett, variert ordbruk og at de overhodet ikke har noen dypere filosofisk eller logisk betydning.

§5 Konsistente utsagnsmengder.

Vi har nå sett på konstruksjonene (1) – (7) på listen i § 0.4. Den åttende konstruksjonen på denne listen er "x er en konsistent utsagnsmengde". Er L et første-ordens språk og T en første-ordens teori i dette språk er det vanlig å kalle T for inkonsistent dersom og bare dersom en setning S i L og dens negasjon,¬S, er teoremer i T. Tenker man seg nå at man i stedet for setninger i et første-ordens språk arbeider med utsagn, og at man i stedet for relasjonen "x er et teorem i teorien T" arbeider med relasjonen "x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ", er det nærliggende å definere en konsistent utsagnsmengde Δ som en utsagnsmengde der det ikke finnes noe utsagn x hvor både x og negasjonen av x logisk sett er implisert av utsagnene i Δ. Det er imidlertid lett å se at definiens i denne definisjonen er ekvivalent med den betingelse at det finnes en logisk mulig verden hvor alle utsagnene i Δ er sanne.

Uttrykket "Cons(Δ)" brukes som forkortelse for "Δ er en konsistent utsagnsmengde" og vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 5.1 Cons(Δ) <–> (M(Δ) & Δ Inkl U &
(Ew)(wêI & (Ax)(xêΔ –> True(w,x))))

Denne definisjonen er forøvrig helt analog med den modellteoretiske definisjonen av konsistent setningsmengde, i det en setningsmengde da sies å være konsistent hvis og bare hvis det finnes en modell hvor alle setningene i mengden er sanne.

I forbindelse med konsistente utsagnsmengder er det også naturlig å se på to andre typer av utsagnsmengder, nemlig de som er maksimalt konsistente og dem man kan kalle for fullstendige.

§ 5.1 Maksimalt konsistente utsagnsmengder.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

En mengde med setninger i et språk sies å være maksimalt konsistent om setningsmengden er konsistent og det ikke er mulig å finne en mer omfattende setningsmengde som også er konsistent.

Anvendes dette på utsagn kan man helt analogt definere en maksimalt konsistent utsagnsmengde som en utsagnsmengde som er konsistent og som ikke er strengt inkludert i noen mer omfattende konsistent utsagnsmengde. Vi bruker "Maks;k(Δ)" som forkortelse for "Δ er en maksimalt konsistent utsagnsmengde" og formulerer definisjonen slik i symboler:

Definisjon 5.1.1 Maks;k(Δ) <–> (M(Δ) & Δ Inkl U & Cons(Δ) & ¬(EΔ;1)(Δ;1êPt(U) & Cons(Δ;1) & Δ SInkl Δ;1))

§5.2 Fullstendige utsagnsmengder.

En teori kalles fullstendig om den er konsistent, og det gjelder for ethvert utsagn x at enten x eller negasjonen av x er med i konsekvensmengden til teorien. En slik definisjon synes å være helt i harmoni med vanlig språkbruk blandt logikere. Den formelle definisjonen av dette begrepet kan presenteres på den følgende måte, om "Comp(x)" brukes som forkortelse for uttrykket "x er en fullstendig teori":

Definisjon 5.2.1 Comp(Δ) <–> (ΔêPt(U) & Cons(Δ) & (Ax)(xêU –> (xêk(Δ) v Neg(x)êk(Δ))))

Vi minner om at "Neg(x)" betegner negasjonen av utsagnet x.

§6 Om muligheten av å relativisere begrepene om fullstendighet og maksimal konsistens.

Selvom vi ikke har spesielt bruk for det i den videre fremstilling tillater vi oss likevel å nevne at begrepene om en fullstendig teori og en maksimalt konsistent utsagnsmengde i en viss forstand kan relativiseres til en vilkårlig utsagnsmengde ∏. En utsagnsmengde Δ sies å være en fullstendig teori relativt til utsagnsmengden ∏, i symboler "Comp;∏(Δ)", hvis og bare hvis Δ,∏êPt(U), Δ Inkl ∏, Δ er konsistent og ethvert utsagn x som er med i ∏ er slik at enten x eller negasjonen til x er med i konsekvensmengden til Δ. Formelt kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 6.1 Comp;∏(Δ) <–> (Δ,∏êPt(U) & Δ Inkl ∏ & Cons(Δ) & (Ax)(xê∏ –> (xêk(Δ) v Neg(x)êk(Δ))))

Tilsvarende kan definisjonen i §5.1 relativeres til en vilkårlig utsagnsmengde ∏ i det man sier at en utsagnsmengde Δ er maksimalt konsistent relativt til ∏, i symboler "Maks;∏(Δ)", hvis og bare hvis Δ,∏êPt(U), Δ Inkl ∏, Δ er konsistent og det ikke finnes noen annen utsagnsmengde som er konsistent og inkludert i ∏, og som inneholder Δ som en ekte del:

Definisjon 6.2 Maks;∏(Δ) <–> (Δ,∏êPt(U) & Δ Inkl ∏ & Cons(Δ) & ¬(EΔ;1)(Δ;1êPt(U) & Δ;1 Inkl ∏ & Cons(Δ;1) & Δ SInkl Δ;1))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

§7 Uavhengige utsagnsmengder.

Ser vi på listen over konstruksjoner i § 0.4 gjenstår det å gjøre rede for predikatene "x er en uavhengig utsagnsmengde" og "x er en strengt uavhengig utsagnsmengde". Hvis intet utsagn i en konsistent utsagnsmengde er noen logisk konsekvens av de resterende utsagn i mengden virker det rimelig å si at elementene i mengden er uavhengige av hverandre, mao. at utsagnsmengden er en uavhengig utsagnsmengde. I det "Ind(Δ)" brukes som forkortelse for "Δ er en uavhengig utsagnsmengde" er det naturlig å formulere definisjonen slik i symboler:

Definisjon 7.1 $\quad Ind(\Delta) \leftrightarrow (\Delta \hat{e} Pt(U) \,\&\, Cons(\Delta) \,\&\, (Ay)(y \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(LK;m(y, \Delta - \{y\}))))$

§8 Strengt uavhengige utsagnsmengder.

Det begrepet om en uavhengig utsagnsmengde som ble innført ovenfor bør holdes adskilt fra det vi her vil kalle strengt uavhengige utsagnsmengder. Anta Δ er en utsagnsmengde, og at ∏ er en vilkårlig delmengde av Δ. Hvis det da for alle slike delmengder ∏ finnes en logisk mulig verden hvor alle utsagnene i ∏ er sanne og alle dem i Δ–∏ er usanne, kaller vi Δ for strengt uavhengig. I det følgende brukes "SInd(Δ)" som forkortelse for "Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde". Definisjonen kan følgelig formuleres slik:

Definisjon 8.1 $\quad SInd(\Delta) \leftrightarrow (\Delta \hat{e} Pt(U) \,\&\, (Ac)(c \hat{e} Pt(U) \,\&\, c\ Inkl\ \Delta \rightarrow (Ew)(w \hat{e} I \,\&\, (Ax)(x \hat{e} c \rightarrow True(w,x)) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} (\Delta - c) \rightarrow \neg(True(w,x))))))$

Det bør bemerkes at de strengt uavhengige utsagnsmengder utgjør en ekte delmengde av de uavhengige utsagnsmengder. Enhver strengt uavhengig utsagnsmengde er altså en uavhengig utsagnsmengde, men ikke omvendt. Det finnes følgelig uavhengige utsagnsmengder som ikke er strengt uavhengige. Det er nokså lett å gi eksempler på dette. Anta a,b er to mengder med mulige verdener som er ikke-tomme og innbyrdes disjunkte, mao. anta at a,b Inkl I & aΩb=ø & a≠ø≠b. Anta videre at u;1 er det utsagnet som har aUb som sin sannhetsmengde og at u;2 er det utsagnet som har aU(I–b) som sin sannhetsmengde. I symboler kan disse forutsetningene formuleres slik:

$u;1 = \mu;\text{-}1(aUb) \;\&\; u;2 = \mu;\text{-}1(aU(I-b))$

La tilslutt Δ={u;1,u;2}. Da er det lett nok å se at u;1 ikke kan utledes fra u;2 eller omvendt. Dette innebærer at Δ er en uavhengig utsagnsmengde. På den annen side ser man også lett at det ikke finnes noen wêI der:

$\neg(True(w,u;1)) \,\&\, \neg(True(w,u;2))$

Fra dette følger: $\neg(Ew)(w \hat{e} I \,\&\, (Ax)(x \hat{e} (\Delta - ø) \rightarrow \neg True(w,x)))$. Dette impliserer at Δ ikke er en strengt uavhengig utsagnsmengde.

§9 Utsagnsmengder som er lukket under de Boolske operasjoner.

Helt tilslutt vil vi innføre to begreper som har en viss interesse i forbindelse med utsagnsteorien T;1. Vi lar "C" betegne den funksjonen som til enhver utsagnsmengde Δ tilordner den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som dessuten er lukket under operasjonene SNu og Neg, dvs. uendelig konjunksjon og negasjon.

Analogt lar vi "C;f" betegne den funksjonen som til enhver utsagnsmengde Δ tilordner den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under operasjonen endelig konjunksjon, K, og negasjon, Neg.

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

C kan mer formelt defineres slik:

Definisjon 9.1 C(Δ) = SN(Mg(X: XêPt(U) & Δ Inkl X &
(Ay)(yêX –> Neg(y)êX) & (Az)(zêPt(X) –> Snu(z)êX)))

C;f defineres på lignende vis:

Definisjon 9.2 C;f(Δ) = SN(Mg(X: XêPt(U) & Δ Inkl X &
(Ay)(yêX –> Neg(y)êX) & (Ay)(Az)(y,zêX –> K(y,z)êX)))

§ 10 Om utledningen av satser i forbindelse med de begreper som er innført.

Vi har nå innført og definert alle de konstruksjonene som vi så langt ønsket å betrakte i forbindelse med teorien T;1. Det gjenstår imidlertid å gjøre rede for en lang rekke satser som gjelder for de predikatene som har blitt definert, satser som kan utledes i teorien T;1. Av spesiell interesse er selvfølgelig slike setninger som kan belyse interessante trekk ved begrepsdannelsene og viktige sammenhenger mellom dem. Fra §14 og utover vil en rekke satser av denne type bli nevnt. Før vi går løs på denne oppgaven vil vi imidlertid sammenligne de begrepsdannelsene som har blitt definert med en rekke beslektede begreper som Tarski innfører i forbindelse med sin generelle teori om deduktivt lukkede setningsmengder. Dette gjøres for å sette teorien T;1 inn i en mer omfattende sammenheng.

Det bør nevnes at de begreper som har blitt definert ikke nødvendigvis er de som fra en vitenskapsteoretisk synsvinkel er mest interessante. Innenfor rammen av T;1 får vi så og si bare med oss "grovstrukturen" til utsagnsmengder. Det er umulig å fange inn noe av det som man kunne kalle utsagnenes "indre struktur". Dette lar seg imidlertid gjøre om T;1 utvides til for eksempel E;3 hvor man også har muligheter for å formulere påstander om enkeltgjenstander, egenskaper og relasjoner. Innenfor denne mer omfangsrike ramme kan flere metodologisk sett viktige begreper innføres og studeres. Imidlertid er T;1 en del av teoriene E;1 – E;3 som er definert i Rognes [4]. En videre utdypning av konsekvensene til T;1 er derfor også en utdypning av disse teorier. I den utstrekning man ønsker en bred og forholdsvis uttømmende innsikt i disse mer omfattende egenskapsteoriene er en grundig undersøkelse av T;1 noe som i høy grad bør anses som relevant.

§ 11 Sammenligning med Tarskis generelle teori om deduktivt lukkede systemer.

De begreper som har blitt innført ovenfor kan sammenlignes med de begreper og den teori som utvikles i Tarski [1]. Denne teorien kan karakteriseres som en generell teori om deduktivt lukkede systemer.

Tarski betrakter i sin artikkel et ikke-tomt område av objekter S og en funksjon ∑ : Pt(S) –> Pt(S) som oppfyller de følgende krav:

Ax1 Cd(S)≤Aleph;0 & M(S)
Ax2 (Ax)(xêPt(S) –> x Inkl ∑(x))
Ax3 (Ax)(xêPt(S) –> ∑(∑(x)) = ∑(x))
Ax4 (Ax)(xêPt(S) –> ∑(x) = UN(Mg(∑(y): yêPt(x) & Cd(y)< Aleph;0))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Et ordnet par <S,∑> som oppfyller de nevnte krav kalles her for en konsekvens-mengde-algebra. Tarskis artikkel kan oppfattes som et bidrag til den generelle teorien om konsekvensmengde-algebraer.

Fra definisjonen ovenfor fremgår det at en konsekvensmengde-algebra er en rent mengdeteoretisk struktur og at studiet av slike strukturer i prinsippet kan foretas innenfor rammen av et passende sterkt mengdeteoretisk system, f.eks. det system som er utarbeidet i Principia Mathematica, systemet ZFC, eller for den saks skyld vårt system som er en modifikasjon av ZFC som tillater urindivider.

Innenfor spesielle deduktive disipliner er det lett å gi konkrete eksempler på konsekvensmengde-algebraer som kan motivere studiet av disse.

La f.eks. L være et første-ordens språk og T en første-ordens teori i dette språk. Betegn klassen av alle de lukkede formlene i L med "CFm(L)". Anta Δ er en vilkårlig delmengde av CFm(L). Δ sies da per definisjon å være T-lukket hvis og bare hvis Δ oppfyller det følgende krav:

Er b;1, ..., b:n,a lukkede formler i L der b;1, ...,b;nêΔ og har man at b;1&...&b;n –> a er et teorem i T så er også a med i Δ.

Gitt denne definisjonen av T-lukket setningsmengde kan man definere en funksjon ∑;T som tilordner enhver delmengde x Inkl CFm(L) en delmengde i CFm(L). Funksjonen er definert slik: ∑;T(x), der x Inkl CFm(L), er den minste mengden av lukkede formler i L som er T-lukket og som inneholder x. Studerer man nå strukturen <CFm(L), ∑;T> kan man vise at dette må være en konsekvensmengde-algebra. Til enhver første-ordens teori T i ethvert første-ordens språk L kan man altså konstruere en konsekvensmengde-algebra, <CFm(L),∑;T>, på denne måten.

Innenfor rammen av T;1 er det også nokså lett å definere en naturlig konsekvensmengde-operasjon som oppfyller de krav som er nevnt i definisjonen av en konsekvensmengde-algebra. Definer operasjonen
k+ :Pt(U) –> Pt(U) ved:

$$k+(x) = Mg(y: yêU \;\&\; (EΔ)(ΔêPt(U) \;\&\; Cd(Δ)≤Aleph;0 \;\&\; Δ \text{ Inkl } x \;\&\; LK;m(y,Δ)))$$

Velger man nå ut en mengde ∏ Inkl U der Cd(∏)≤Aleph;0 og betrakter strukturen <∏, Rest(k+,Pt(∏))> er det forholdsvis likefrem å vise at dette er en konsekvensmengde-algebra.

Imidlertid er ikke strukturen <U,k> der U er klassen av utsagn og k er den konsekvensmengdeoperasjonen som ble definert i §4 noen konsekvensmengde-algebra. Dette skyldes to forhold.

For det første oppfyller ikke U kravet Ax1 siden man kan vise at Cd(U) ≥Cd(2^Aleph;0). For det andre oppfyller ikke operasjonen k kravet Ax4. Dette er det forøvrig nokså lett å vise: Anta a er en mengde der ø≠a Inkl I. La c være en enummerering av (I–a) og anta at Cd(I–a)≥Aleph;0. Det byr ikke på spesielle vanskeligheter å bevise eksistensen av a og c med disse egenskapene på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene i T;1. Sett b=Dom(c) og definer for hvert gêb et utsagn u(g) ved:

u(g) = s;-1(I – Mg(c(g'): g'<g))

la tilslutt ∏;0 være definert ved ∏;0 = Mg(u(g): g<b). Merk at siden c er en ennummerering av (I–a) er de enkelte elementer i domenet til c ordinaltall og da er også selve domenet til c et ordinaltall. Under disse forutsetninger kan man bevise:

(1) $k(∏;0) ≠ UN(Mg(k(Δ): ΔêPt(∏;0) \;\&\; Cd(Δ)< Aleph;0))$

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Vi har f. eks. at s;-1(a) êk(∏;0), men likevel samtidig at

¬(s;-1(a)êUN(Mg(k(Δ): ΔêPt(∏;0) & Cd(Δ)< Aleph;0)))

Dette gir en et klart moteksempel til den påstanden som fremkommer når man i Ax4 erstatter S med U og ∑ med k, siden ∏;0êPt(U).

Siden alle de setningene som utledes i Tarski [1] om konsekvensmengde-algebraer kan utledes på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene som inngår i T;1 følger det at alle disse setningene kan utledes i T;1. Siden disse setningene gjelder konsekvensmengde-algebraer allment følger det også at de gjelder spesielt for strukturene av typen <∏,Rest(k+,Pt(∏))> der ∏ Inkl U og Cd(∏) ≤Aleph;0.

§12 Bgreper som Tarski innfører og som har stor likhet med dem som er innført her.

I forbindelse med konsekvensmengdealgebraer introduserer Tarski en rekke begreper som har en nokså stor likhet med dem som har blitt innført i §1 – §10. Det vil nå bli gitt en oversikt over disse nye begrepsdannelsene og de vil bli sammenlignet med dem som allerede har blitt innført. Det gjøres oppmerksom på at vi benytter en annen notasjon enn den som brukes i Tarski [1], men bortsett fra dette er definisjonene innholdsmessig og saklig sett nøyaktig som i det nevnte arbeid.

Med et deduktivt lukket system i en konsekvensmengde algebra <S,∑> forstås en mengde x Inkl S der man har x=∑(x). Siden ∑(x) representerer konsekvensmengden til x i algebraen <S,∑>, om x Inkl S, følger det at et deduktivt lukket system er en mengde som er identisk med sin egen konsekvensmengde. Vi forkorter konstruksjonen "x er et deduktivt lukket system i konsekvens-mengde-algebraen <s,∑>" med "DCL;<S,∑>(x)". Definisjonen som ble formulert rett ovenfor kan da uttrykkes slik i symboler:

Definisjon 12.1 DCL;<S,∑>(x) <–> (xêPt(S) & ∑(x)=x)

Setter man her inn U og k for henholdsvis S og ∑ i definiens får man en formel som man i T;1 kan vise at er ekvivalent med DCL(x). Den følgende formel er altså et teorem i T;1:

(Ax)(DCL(x) <–> (xêPt(U) & k(x)=x))

Derimot kan man ikke vise at det følgende holder i T;1:

(Ax)(DCL(x) <–> DCL;<U,k+>(x))

Er x og y to mengder sies x å være ekvivalent med y i relasjon til konsekvensmengde-algebraen <S,∑> dersom og bare dersom x,y begge er elementer i Pt(S) og de har det samme konsekvenssystemet, mao. ∑(x)=∑(y). Vi skriver "LEkv;<S,∑>(x,y)" som forkortelse for "x og y er ekvivalente i relasjon til konsekvensmengde-algebraen <S,∑>". Definisjonen kan da formuleres slik i symboler:

Definisjon 12.2 LEkv;<S,∑>(x,y) <–> (x,yêPt(S) & ∑(x) = ∑(y))

Merk at vi kan bruke denne definisjonen hva enten <S,∑> er en konsekvens-mengde-algebra eller ikke, siden hensikten med definisjonen bare er å gjøre klart at uttrykket til venstre brukes som en forkortelse for uttrykket til høyre. Dette gjelder også de resterende definisjoner som vi vil nevne her i forbindelse med Tarski's arbeid.

Det bør nevnes at man i T;1 kan vise den følgende setning:

LEkv;m(x,y) <–> LEkv;<U,k>(x,y)

Derimot kan man i T;1 vise at det finnes moteksempler til den følgende påstand:

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

LEkv;m(x,y) <–> LEkv;<U,k+>(x,y).

Merk her at selvom <U,k+> ikke er en konsekvensmengde-algebra kan vi selvfølgelig substituere U og k+ for S og ∑ i definisjonen ovenfor og benytte denne.

Vi forkorter uttrykket "x er en aksiomatisering av mengden y relativt til strukturen <S,∑>" med "Axm;<S,∑>(x,y)". Tarskis definisjon kan formuleres slik:

Definisjon 12.3 Axm;<S,∑>(x,y) <–> (LEkv;<s,∑>(x,y) & Cd(x)<Aleph;0)

Med andre ord er en aksiomatisering av en gitt mengde en endelig mengde som er ekvivalent med den gitte. I relasjon til strukturen <U,k> kan man vise at enhver utsagnsmengde har en aksiomatisering i denne forstand. Men lar man ∏ være en tellbart uendelig utsagnsmengde hvor alle utsagnene er uavhengige i den betydning som er angitt i §7, dvs. antar man at ∏êPt(U) & Cd(∏) = Aleph;0 & Ind(∏), kan man vise at relativt til strukturen <∏,Rest(k+,Pt(∏)> vil det finnes delmengder x av ∏ som ikke er aksiomatiserbare og dessuten at kardinaltallet til de ikke-aksiomatiserbare mengdene er større enn det til de aksiomatiserbare utsagnsmengdene i Pt(∏).

Tarski kaller en utsagnsmengde for uavhengig relativt til strukturen <S,∑> dersom og bare dersom mengden av de utsagnsmengder som er inkludert i mengden, og ekvivalente med denne relativt til <S,∑>, utelukkende inneholder mengden selv. Forkorter vi uttrykket "x er en uavhengig utsagnsmengde realtivt til <S,∑>" med "Ind;<S,∑>(x)" kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 12.4 Ind;<S,∑>(x) <–> Mg(y ; y Inkl x & LEkv;<S,∑>(y,x)) = {x}

I teorien T;1 er det mulig å vise at hvis xêPt(U) så har man Ind;<U,k>(x) hvis og bare hvis Ind(x). Dette innebærer at relativt til strukturen <U,k> faller dette uavhengighetsbegrep sammen med det vi tidligere har definert i §7.

En basis for en utsagnsmengde er en uavhengig utsagnsmengde som er ekvivalent med x. Vi forkorter "x er en basis for mengden y relativt til <S,∑>" med "Bas;<S,∑>(x,y)" og formaliserer definisjonen på den følgende måte:

Definisjon 12.5 Bas;<S,∑>(x,y) <–> (Ind;<S,∑>(x) & LEkv;<S,∑>(x,y))

En mengde x kalles for konsistent relativt til strukturen <S,∑> i symboler Cons;<S,∑>(x) hvis og bare hvis x ikke er ekvivalent med S relativt til <S,∑>. Definisjonen formuleres slik:

Definisjon 12.6 Cons;<S,∑>(x) <–> (xêPt(S) & ¬(LEkv;<S,∑>(x,S)))

Dette konsistensbegrep faller sammen med det vi tidligere har definert om vi ser det relativt til strukturen <U,k>. Dette innebærer at den følgende formel er et teorem i T;1:

(Ax)(Cons;<U,k>(x) <–> Cons(x))

Tarski kaller x for avgjørbar relativt til mengden y i forhold til strukturen <S,∑> dersom og bare dersom x er et element i S og y er en delmengde av S og vi dessuten har at x enten er med i konsekvenssytemet til y, ie. xê∑(y) eller det er slik at y utvidet med x er en inkonsistent

mengde relativt til <S,∑>. Uttrykket "x er avgjørbar relativt til y i forhold til strukturen <S,∑>" forkortes med
"DC;<S,∑>(x,y)". Definisjonen formuleres slik:

Definisjon 12.7 DC;<S,∑>(x,y) <–> (xêS & yêPt(S) &
(xê∑(y) v ¬ Cons;<S,∑>(yU{x})))

Også denne begrepsdannelsen kan relateres til en vi tidligere har definert, nemlig begrepet fullstendig utsagnsmengde. Man har at en fullstendig utsagnsmengde x er en mengde hvor ethvert utsagn er avgjørbart relativt til x. Det følgende teorem i T;1 uttrykker denne påstand:

(AΔ)(ΔêPt(U) –> (Comp(Δ) <–> U = Mg(y: DC;<U,k>(y,Δ)))

Merk at dette gir en en alternativ karakteristikk av begrepet fullstendig utsagnsmengde.

Mot slutten av sin artikkel innfører Tarski to begreper om har med graden av fullstendighet til et deduktivt system å gjøre. Den kardinale fullstendighetsgraden til en mengde x relativt til struksturen <S,∑>, i symboler "g;<S,∑>(x)", er definert slik:

Definisjon 12.8.1 g;<S,∑>(x) = Cd(Mg(y: DCL;<S,∑>(y) & x Inkl y))

Dette innebærer at den kardinale fullstendighetsgraden til et deduktivt system er kardinaltallet til mengden av alle de deduktive systemer som det er inkludert i.

Anta nå at <S,∑> er en konsekvensmengde-algebra og at xêPt(S). La nå c være en sekvens av stadig mer inklusive deduktivt lukkede systemer i denne algebraen som er konsistente og som inkluderer x. Anta at hvert system i sekvensen er strengt inkludert i det neste. Anta Dom(c)=b. Da kaller vi en slik sekvens for en systemsekvens over x av lengde b. For en gitt xêPt(S) vil det for visse ordinaltall g ikke finnes noen systemsekvens over x av lengde g. Det minste av disse ordinaltall vil da gi en et salgs mål på fullstendighetsgraden til x over strukturen <S,∑>. Betegner vi denne med "G;<S,∑>(x)" kan vi formulere definisjonen slik:

Definisjon 12.8.2 G;<S,∑>(x) = μb(bêOn & ¬(Ec)(c: b–> Pt(S) &
(Ag)(g<b –> (x Inkl c(g) & Cons;<S,∑>(c(g)) & DCL;<S,∑>(c(g)))) &
(Ag;1)(Ag,2)(g;1<g;2<b –> c(g;1) SInkl c(g;2))))

Etter denne oversikten over hvordan de viktigste begrepene i Tarskis arbeid om deduktivt lukkede systemer kan presenteres innenfor rammen av T;1 bemerkes følgende:

Definisjonene i §1 – §10 er knyttet direkte til teorien T;1 og er ikke utformet med Tarskis lære om konsekvensmengder i tankene. Derimot er definisjonene 12.1 – 12.8.2, slik det fremgår av det som er nevnt ovenfor formulert med den baktanke at de skal kunne brukes i forbindelse med konsekvens-mengde algebraer. Dette forhindrer imidlertid ikke at disse definisjonene også kan benyttes uavhengig av Tarskis spesielle teori. Ser man på f.eks. definisjonen av "LEkv;<S,∑>(x,y)" forkorter dette uttrykket det lengere uttrykket "x,yêPt(S) & ∑(x) = ∑(y)> som er en åpen setning i språket til T;1 og derfor selvfølgelig et velformet uttrykk i L;e[Δ;0]. Definisjonen kan derfor brukes selvom <S,∑> ikke er noen konsekvensmengde-algebra.

§ 13 Om hvordan teorien vil bli fremstilt i det følgende.

Etter at visse sider ved Tarskis teori nå har blitt betraktet er det naturlig å vende tilbake til de begrepsdannelsene som ble introdusert i §1 – §10 og formulere en rekke setninger om dem som kan utledes i teorien T;1. Det er to ting som det kan være passende å bemerke i denne forbindelse:

For det første må det nevnes at det her ikke vil bli gitt fullstendige bevis for de satser som presenteres. Det er to grunner til dette. Den viktigste grunnen er at det å gi detaljerte bevis vil gjøre dette arbeidet uforholdsmessig langt. Her er det tross alt hovedsaken å gi leseren et innblikk i hva teorien T;1 impliserer om de begrepene vi har nevnt. En detaljert bevisførsel vil derfor lett bidra til at oppmerksomheten konsentreres om detaljer i bevisførselen og ledes bort fra det som etter vår mening er det vesentlige. Dessuten er det en fare for at detaljerte bevis rett og slett kan virke trettende på leseren. Det andre forhold er at de teoremer som det vil bli gjort rede for utmerket godt kan forstås uten at man samtidig gir detaljerte bevis. I tillegg er bevisene også av en stort sett elementær natur slik at leseren selv kan få en dypere forståelse av teorien ved å konstruere dem på egenhånd.

Det neste vi ønsker å peke på er at teoremene vi nevner er samlet sammen fordi vi vil gjøre bruk av dem i andre arbeider. Det kan da være hensiktsmessig å ha dem samlet på ett sted slik at man ikke til stadighet behøver å formulere dem på nytt, men kan refere tilbake til dette arbeidet.

Tilslutt nevnes det at de teoremene som vil bli presentert etter vår mening belyser de viktigste elementære sammenhengene mellom de begrepene som har blitt innført. Sammenhenger som det kan være nyttig å kjenne til. Mer sofistikerte setninger vil bli belyst og omtalt i andre arbeider.

§ 14 Teoremer som belyser konsekvensrelasjonene som har blitt innført.

Vi starter med noen teoremer som kan belyse de konsekvensrelasjoner som ble innført i §1. Det følgende teorem er av interesse fordi det angir en rekke alternative karakteristikker av LK;m og LK, og dermed viser at disse begrepene kunne ha blitt definert på andre måter enn dem som ble nevnt i §1:

Teorem 1 (T;1) Anta $\Delta \hat{e} Pt(\Delta)$ og at $x \hat{e} U$. Da gjelder:

(a) $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow s(SNu(\Delta))$ Inkl $s(x) \leftrightarrow LK(x,SNu(\Delta)) \leftrightarrow LK;m(x,\{SNu(\Delta)\})$

(b) $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow \neg Cons(\Delta U \{Neg(x)\})$

(c) $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow s(K(SNu(\Delta), Neg(x))) = \emptyset$

(d) $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow s(D(Neg(SNu(\Delta)),x)) = I$

(e) $LK;m(x,\Delta) \leftrightarrow LK;m(C(SNu(\Delta),x), \{t\}) \leftrightarrow LK(C(SNu(\Delta),x), t)$

Noen kommentarer: Fra punkt (a) fremgår det at x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ hvis og bare hvis sannhetsmengden til x inkluderer sannhetsmengden til den uendelige konjunksjon av utsagnene i Δ. Videre er $LK;m(x,\Delta)$ ekvivalent med at x er en logisk konsekvens av konjunksjonen av utsagnene i Δ og dessuten ekvivalent med den påstand at x er en logisk konsekvens av utsagnene i den enhetsmengden som utelukkende inneholder $SNu(\Delta)$. Fra Punkt (b) – (e) ser man at $LK;m(x,\Delta)$ er ekvivalent med den påstand at $\Delta U\{Neg(x)\}$ er en inkonsistent teori, videre ekvivalent med at konjunksjonen av $SNu(\Delta)$ og $Neg(x)$ har en tom sannhetsmengde og dessuten ekvivalent med det forhold at disjunksjonen av x og negasjonen av $SNu(\Delta)$ har hele I som sin sannhetsmengde. Tilslutt fremgår det fra (e) at x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ hvis og bare hvis kondisjonalutsagnet

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

med SNu(Δ) som antesedent og x som konsekvent er en logisk konsekvens av det nødvendige utsagn, t.

Det neste teoremet sier at LK er en refleksiv og transitiv relasjon, videre at hvis x er en logisk konsekvens av Δ;1 og alle utsagnene i Δ;1 er logiske konsekvenser av dem i mengden Δ;2 så er også x en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ;2. Tilslutt uttrykker punkt (d) den påstand at hvis alle utsagnene i Δ;1 er konsekvenser av utsagnene i mengden Δ så er utsagnet SNu(Δ;1) det også.

Teorem 2 (T;1)
(a) $x \hat{e} U \rightarrow (LK(x,x) \,\&\, LK(x,\{x\})$
(b) $x,y,z \hat{e} U \rightarrow (LK(x,y) \,\&\, LK(y,z) \rightarrow LK(x,z))$
(c) $LK;m(x,\Delta;1) \,\&\, (Ay)(y \hat{e} \Delta;1 \rightarrow LK;m(y,\Delta;2)) \,\&\, \Delta;2 \hat{e} Pt(U). \rightarrow LK;m(x,\Delta;2)$
(d) $\Delta;1,\Delta;2 \hat{e} Pt(U) \,\&\, (Ay)(y \hat{e} \Delta;1 \rightarrow LK;m(y,\Delta;2)) \rightarrow LK;m(SNu(\Delta;1),\Delta;2)$

I forbindelse med Teorem 1 og Teorem 2 nevnes det at bevisene for disse satsene er forholdsvis enkle. Det dreier seg i begge tilfelle om påstander som følger temmelig direkte fra de definisjonene som ble gitt i §1.

Er Δ;1, Δ;2 to utsagnsmengder hvor Δ;2 er konsistent, og er alle utsagnene i Δ;1 logiske konsekvenser av utsagnene i Δ;2, er også Δ;1 konsistent. Er videre Δ;1 en inkonsistent utsagnsmengde kan vi slutte at ethvert utsagn er en logisk konsekvens av Δ;1. Er tilslutt Δ;1 og Δ;2 to utsagnsmenger der utsagnet x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ;1 og Neg(x) er en logisk konsekvens av utsagnene i Δ;2, kan man slutte at Δ;1UΔ;2 er inkonsistent. Dette er hovedinnholdet i det følgende teorem:

Teorem 3 (T;1)
(a) $\Delta;1,\Delta;2 \hat{e} Pt(U) \,\&\, Cons(\Delta;2) \,\&\, (Ay)(y \hat{e} \Delta;1 \rightarrow LK;m(y,\Delta;2)) \rightarrow Cons(\Delta;1)$
(b) $\Delta;1,\Delta;2 \hat{e} Pt(U) \,\&\, LK;m(SNu(\Delta;1),\Delta;2) \rightarrow (Ay)(y \hat{e} \Delta;1 \rightarrow LK;m(y,\Delta;2))$
(c) $\Delta \hat{e} Pt(U) \,\&\, \neg Cons(\Delta) \rightarrow (Ay)(y \hat{e} U \rightarrow LK;m(y,\Delta)$
(d) $LK;m(y,\Delta;1) \,\&\, LK,m(Neg(y),\Delta;2) \rightarrow \neg Cons(\Delta;1U\Delta;2)$

Tilslutt nevner vi en sats som sier noe om kardinaltallet til mengden av de utsagn som er implisert av et gitt utsagn y og kardinaltallet til mengden av alle de utsagn som impliserer et gitt utsagn:

Teorem 4 (T;1)
(a) $y \hat{e} U \rightarrow Cd(Mg(x: LK(x,y))) = Cd(Pt(I–s(y)))$
(b) $y \hat{e} U \rightarrow Cd(Mg(x: LK(y,x))) = Cd(Pt(s(y)))$
(c) $x,y \hat{e} U \,\&\, LK(x,y) \,\&\neg LK(y,x) \,\&\, Cons(\{y\}) \,\&\neg(Ez)(z \hat{e} U \,\&\, z \neq x \,\&\, z \neq y \,\&\, LK(x,z) \,\&\, LK(z,y)) \rightarrow (Ew)(w \hat{e} I \,\&\, s(x) = s(y) U \{w\})$

Fra punkt (a) fremgår det at mengden av alle de utsagn som er logiske konsekvenser av et gitt utsagn y har samme kardinaltall som potensmengden til sannhetsmengden til negasjonen av utsagnet y. Fra punkt (b) ser man at kardinaltallet til mengden av utsagn som impliserer y er lik kardinaltallet til potensmengden til y's sannhetsmengde. Punkt (c) sier at hvis x,y er to utsagn der y impliserer strengt x og det ikke finnes noe mellomliggende utsagn

z implisert av y og som impliserer x så er sannhetsmengden til x identisk med sannhetsmengden til y utvidet med en eneste mulig verden.

§ 15 Teoremer om logisk ekvivalens.

I denne paragrafen tar vi for oss de ekvivalensbegrepene som ble innført i § 2 og § 2.1. Det første av disse begrepene er egentlig ikke særlig interessant siden man kan vise at ekvivalens mellom enkeltutsagn faller sammen med identitet. Man har:

(Ax)(Ay)(x,yêU –> (LEkv(x,y) <–> x=y))

Derimot er ekvivalens mellom utsagnsmengder en mer "produktiv" og interessant relasjon. Først noterer vi at LEKv;m, ekvivalens mellom utsagnsmengder, er en ekvivalensrelasjon og at en rekke egenskper ved utsagnsmengder som f.eks. konsistens og fullstendighet er "invariante" med hensyn på denne relasjonen. Dette er i hovedsak innholdet i det følgende teorem:

Teorem 5 (T;1)
(a) ΔêPt(U) –> LEkv;m(Δ,Δ)
(b) LEkv;m(Δ;1,Δ;2) & LEkv;m(Δ;2,Δ;3) –> LEkv;m(Δ;1,Δ;3)
(c) LEkv;m(Δ;1,Δ;2) –> LEkv;m(Δ;2,Δ;1)
(d) LEkv;m(Δ;1,Δ;2) –> (Cons(Δ;1) <–> Cons(Δ;2))
–> k(Δ;1) = k(Δ;2)
–> (Comp(Δ;1) <–> Comp(Δ;2))
(e) Δ;1,Δ;2,Δ;3êPt(U) –> LEkv;m(Δ;1,Δ;2) –>
LEkv;m(Δ;1UΔ;3, Δ;2UΔ;3)

Det neste teoremet gir forskjellige karakteristikker av relasjonen LEkv;m og viser andre måter vi kunne ha definert dette begrepet på:

Teorem 6 (T;1) Anta Δ;1,Δ;2êPt(U). Da er de følgende betingelser ekvivalente:
(i) LEkv;m(Δ;1,Δ;2)
(ii) s(SNu(Δ;1)) = s(SNu(Δ;2))
(iii) k(Δ;1) = k(Δ;2)
(iv) s(Neg(SNu(Δ;1))) = s(Neg(SNu(Δ;2)))
(v) (AX)(Maks;k(X) –> (Δ;1 Inkl X <–> Δ;2 Inkl X))
(vi) (AX)(Comp(X) –> (Δ;1 Inkl k(X) <–> Δ;2 Inkl k(X)))
(vii) Δ;1 Inkl k(Δ;2) & Δ;2 Inkl k(Δ;1)
(viii) Mg(y: yêU & Cons(Δ;1U{y})) = Mg(y: yêU & Cons(Δ;2U{y}))

Den neste satsen viser at vi kunne ha definert relasjonen LK;m ved hjelp av logisk ekvivalens:

Teorem 7 (T;1) yêU & ΔêPt(U) –> (LK;m(y,Δ) <–> LEkv;m(ΔU{y},Δ))

Tilslutt i forbindelse med logisk ekvivalens nevner vi satsen nedenfor. Denne sier at mengden av alle utsagnsmengder som er ekvivalente med {t}, dvs. enhetsmengden som inneholder det tautologiske utsagn, er identisk med mengden {{t}}. Dessuten karakteriserer satsen kardinaltallet til mengden av alle teorier som er ekvivalente med en gitt teori Δ og kardinaltallet til alle LEkv;m-ekvivalensklasser.

Teorem 8 (T;1) (a) Mg(Δ: ΔêPt(U) & LEkv;m(Δ,{t})) = {{t}}

(b) ΔêPt(U) –> Cd[Mg(Δ;1 : Δ;1êPt(U) & LEkv;m(Δ;1,Δ))]
=Cd[Pt(Pt(s(Neg(SNu(Δ)))))]

(c) Er ΔêPt(U) gjelder:
Cd[Mg(Mg(Δ;1: Δ;1êPt(U) & LEkv;m(Δ;1,Δ)): ΔêPt(U))] =

Cd(Pt(I))

§ 16 Satser om konsekvenssystemet til utsagnsmengder.

De neste teoremene angår konsekvensmengden til utsagnsmengder og egenskapene til deduktivt lukkede utsagnsmengder. Det første teoremet vi nevner i denne forbindelse angir en del temmelig elementære egenskaper til konsekvensmengde-operasjonen k:

Teorem 9 (T;1)
(a) k(ø) = {t} & k(U)=U
(b) ΔêPt(U) –> Δ Inkl k(Δ)
(c) Δ;1,Δ;2êPt(U) –> (Δ;1 Inkl k(Δ;2) –> k(Δ;1) Inkl k(Δ,2))
(d) ΔêPt(U) –> k(k(Δ)) = k(Δ)
(e) Δ;1,Δ;2êPt(U) & Δ;1 Inkl Δ;2 –> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)
(f) ΔêPt(U) –> SNu(Δ)êk(Δ)
(g) ΔêPt(U) –> Snu(k(Δ))êk(Δ)
(h) ΔêPt(U) & ∏ Inkl k(Δ). –> SNu(∏)êk(Δ)
(i) ΔêPt(U) & x,yêk(Δ) –> K(x,y)êk(Δ)
(j) ∏,ΔêPt(U) & ∏ Inkl k(Δ) & LK;m(y,∏). –> yêk(Δ)
(k) Δ;1,Δ;2êPt(U) –> (Δ;1 Inkl k(Δ;2) –> k(Δ;2) = k(Δ;1UΔ;2))

Som man ser sier teoremet at konsekvensmengden til nullmengden og mengden av alle utsagn er henholdsvis {t} og U. Videre er alltid en utsagnsmengde inkludert i sitt eget konsekvenssytem og er en mengde Δ;1 Inkl Δ;2 så er også konsekvenssytemet til Δ;1 inkludert i konsekvensmengden til Δ;2. I tilknytning til teoremet bør det nevnes at (e) kan utledes ved hjelp av (c) og omvendt. Vi ser forøvrig ingen grunner til å gi ytterligere og mer utførlige kommentarer til teoremet.

Det følgende teorem angir noen flere egenskaper til operasjonen k. Er Δ en utsagnsmengde er Δ konsistent hvis og bare hvis konsekvensmengden til Δ er en ekte del av U, mengden av alle utsagn. Videre har man at konsekvensmengden til en utsagnsmengde Δ er identisk med konsekvensmengden til den mengden som utelukkende inneholder SNu(Δ) og at SNu(k(Δ)) er identisk med SNu(Δ):

Teorem 10 (T;1) Er ΔêPt(U) gjelder:
(i) Cons(Δ) <–> k(Δ) SInkl U
(ii) k(Δ) = k({SNu(Δ)})
(iii) SNu(k(Δ)) = SNu(Δ)

Den neste setningen angår deduktivt lukkede utsagnsmengder:

Teorem 11 (T;1)
(a) ΔêPt(U) –>(DCL(Δ) <–> Δ=k(Δ))
(b) ΔêPt(U) –> (DCL(Δ) <–> (Ex)(xêPt(U) & Δ= k(x)))
(c) ΔêPt(U) –> DCL(k(Δ))
(d) DCL(Δ) & ∏ Inkl Δ & ∏êPt(U) –> k(∏) Inkl Δ

(e) $DCL(\Delta) \& \prod \text{Inkl } \Delta \& \prod \hat{e} Pt(U) \rightarrow SNu(\prod) \hat{e} \Delta$
(f) $DCL(\Delta) \& LK;m(y,\prod) \& \prod \text{Inkl } \Delta \rightarrow y \hat{e} \Delta$

De to første punktene i denne satsen er av interesse fordi de viser andre, alternative, måter vi kunne ha definert "deduktivt lukket utsagnsmengde" på.

§ 17 Satser om egenskapene til konsistente utsagnsmengder.

Vi definerte tidligere, i §5, hva som mentes med en konsistent utsagnsmengde. Legger man til grunn denne denne definisjonen er det mulig å vise at nullmengden og konsekvensmengden til nullmengden er konsistente teorier. På den annen side har man at U og k(U) selvfølgelig er inkonsistente:

Teorem 12 (T;1) (a) $Cons(ø) \& Cons(k(ø))$
(b) $\neg Cons(U) \& \neg Cons(k(U))$

Selvom dette resultatet er temmelig uanselig har det tross alt en viss interesse å nevne disse spesialtilfellene.

Det følgende teorem angir i analogi med tidligere teoremer en rekke ekvivalente betingelser for konsistens og viser dermed andre måter som man kunne ha definert uttrykket "konsistent utsagnsmengde" på.

Teorem 13 (T;1) (Ekvivalensteorem)
Anta $\Delta \hat{e} Pt(U)$. Da er de følgende betingelser ekvivalente:
(i) $Cons(\Delta)$
(ii) $s(SNu(\Delta)) \neq ø$
(iii) $SNu(\Delta) \neq k$
(iv) $\neg(Ey)(y \hat{e} U \& Neg(y) \hat{e} k(\Delta) \& y \hat{e} k(\Delta))$
(v) $k(\Delta)$ SInkl U
(vi) $(E\Delta;2)(\Delta;2 \hat{e} Pt(U) \& Maks;k(\Delta;2) \& \Delta \text{ Inkl } k(\Delta;2))$
(vii) $(E\Delta;1)(\Delta;1 \hat{e} Pt(U) \& Comp(\Delta;1) \& \Delta \text{ Inkl } k(\Delta;1))$
(viii) $\neg(k \hat{e} k(\Delta))$
(ix) $(Ew)(w \hat{e} I \& (Ay)(y \hat{e} \Delta \rightarrow LK(y, s;-1(\{w\}))))$

Vårt neste teorem angir flere egenskaper som konsistente utsagnsmengder har. Siden det ikke skulle være vanskelig å forstå de enkelte punkter i satsen avstår vi fra mer detaljerte kommentarer.

Teorem 14 (T;1) (a) $Cons(\Delta) \& \Delta;1 \hat{e} Pt(\Delta) \rightarrow Cons(\Delta;1)$
(b) $Cons(\Delta) \& \Delta;1 \hat{e} (Pt(U) \Omega k(\Delta)) \rightarrow Cons(\Delta;1)$
(c) $Cons(\Delta;1) \& \Delta;2 \hat{e} Pt(U) \& LEkv;m(\Delta;2,\Delta;1). \rightarrow Cons(\Delta;2)$
(d) $Cons(\Delta) \& \Delta;1 \hat{e} Pt(U) \& \Delta;1 \text{ Inkl } \Delta \rightarrow Cons(k(\Delta;1))$
(e) $\Delta \hat{e} Pt(U) \rightarrow (Cons(\Delta) \leftrightarrow Cons(\{SNu(\Delta)\}))$
(f) $\Delta, \prod \hat{e} Pt(U) \& \prod \text{Inkl } \Delta \rightarrow$
$(Cons(\Delta) \leftrightarrow Cons((\Delta - \prod) U \{SNu(\prod)\}))$
(g) $\Delta;1 \hat{e} Pt(U) \& Cons(\Delta) \& \Delta;1 \text{ Inkl } k(\Delta) \rightarrow Cons(\Delta U \Delta;1)$
(h) $Cd(Mg(\Delta: Cons(\Delta))) = Cd(Pt(U))$

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Punkt (h) fortjener en viss oppmerksomhet siden denne satsen sier at mengden av alle konsistente utsagnsmengder er likemektig med mengden av alle utsagnsmengder. Dette innebærer at selvom man fjerner alle inkonsistente utsagnsmengder fra Pt(U) får man altså ikke som resultat en mengde med mindre kardinaltall.

§ 18 Satser om maksimalt konsistente utsagnsmengder.

Det første teoremet i forbindelse med maksimalt konsistente utsagnsmengder angir en rekke betingelse som er ekvivalente med maksimal konsistens og som derfor i noen grad bidrar til å utdype innholdet i dette begrepet:

Teorem 15 (T;1) Anta Δ∈Pt(U). Da er de følgende betingelser ekvivalente:
- (i) Maks;k(Δ)
- (ii) (Ew)(w∈I & Δ = Mg(y: y∈U & True(w,y)))
- (iii) Cons(Δ) & (Ay)(y∈Δ –> (y∈k(Δ) v Neg(y)∈k(Δ)))
- (iv) Cons(Δ) & ¬(Ey)(y∈U & ¬(y∈Δ) & Cons(ΔU{y}))
- (v) Cons(Δ) & ¬(EΔ;1)(Δ;1∈Pt(U) & Cons(Δ;1) & Δ SInkl k(Δ;1))
- (vi) (Ew)(w∈I & Δ = k({s;-1({w})}))
- (vii) Δ = UN(Mg(Δ;1: Comp(Δ;1) & Cons(Δ;1UΔ)))

Det følgende teorem er nyttig når man skal bevise Teorem 15 og viser at det finnes en bestemt avbildning som avbilder mengden av mulige verdener en-entydig og på mengden av maksimalt konsistente mengder:

Teorem 16 (T;1) Sett per definisjon f= Mg(<w, Mg(y: y∈U & True(w,y))>: w∈I)
Da gjelder følgende:
- (a) f: I –(1-1,på)–> Mg(Δ: Maks;k(Δ))
- (b) (Aw)(w∈I –> s(SNu(f(w))) = {w})

Den neste satsen er denne:

Teorem 17 (T;1) Man har:
- (a) Δ;1,Δ;2∈Pt(U) & Maks;k(Δ;i) (i=1,2) & Cons(Δ;1UΔ;2) –> Δ;1=Δ;2
- (b) Δ;1,Δ;2∈Pt(U) & Maks;k(Δ;i) (i=1,2) –> Δ;1 ≈ Δ;2
- (c) Maks;k(Δ;1) & Comp(Δ;2) & Cons(ΔUΔ;2) –> Δ;2 Inkl Δ;1
- (d) Maks;k(Δ) & y∈U –> (y∈k(Δ) v Neg(y)∈k(Δ))
- (e) Maks;k(Δ) –> k(Δ)=Δ
- (f) Maks;k(Δ) & Δ;1∈Pt(U) & Δ;1 SInkl Δ –> ¬Maks;k(Δ;1)
- (g) Maks;k(Δ) –> Comp(Δ)
- (h) Maks;k(Δ) –> DCL(Δ)
- (i) Δ∈Pt(U) –> (Maks;k(k(Δ)) <–> Comp(Δ))

Dette teorem nevner en del egenskaper ved maksimalt konsistente mengder som kan være verdt å merke seg. Er f.eks. Δ;1,Δ;2 to maksimalt konsistente mengder hvis union er konsistent så er mengdene identiske. Videre vil det alltid være slik at to maksimalt konsistente mengder er likemektige. Dette fremgår av punkt (a) og (b) i teoremet. Fra punkt (c) ser man videre at om Δ;1 og Δ;2 er utsagnsmengder hvor den ene er maksimalt konsistent og den andre er en komplett teori så vil den komplette teorien være inkludert i den maksimalt konsistente utsagnsmengden så sant unionen av dem er konsistent. Videre sier teoremet at

enhver maksimalt konsistent mengde er deduktivt lukket og komplett, og at en utsagnsmengde er en komplett teori hvis og bare konsekvensmengden til den er en maksimalt konsistent mengde. Forøvrig kan ingen ekte delmengde av en maksimalt konsistent mengde være maksimalt konsistent, og er Δ maksimalt konsistent er enten y eller negasjonen av y med i konsekvenssystemet til Δ forutsatt at y er et utsagn.

Den følgende sats kan nokså lett utledes ved hjelp av Teorem 16. Den sier for det første at mengden av maksimalt konsistente mengder er likemektig med mengden av mulige verdener. For det andre sier den at hvis y er et vilkårlig utsagn så er y alltid identisk med den uendelige disjunksjonen hvor disjunktene er de diverse SNu(Δ) der ΔêPt(U) & yêk(Δ) og Δ er en maksimalt konsistent utsagnsmengde:

Teorem 18 (T;1) (a) $Mg(\Delta: Maks;k(\Delta)) \approx I$
(b) $y \hat{e} U \rightarrow y = UNu(Mg(x: (E\Delta)(\Delta \hat{e} Pt(U) \,\&\, x = SNu(\Delta) \,\&\, Maks;k(\Delta) \,\&\, y \hat{e} k(\Delta))))$

Tilslutt nevner vi den følgende mer grunnleggende sats som sier at enhver konsistent utsagnsmengde er inkludert i minst en maksimalt konsistent mengde. Fra denne setningen følger naturligvis eksistensen av maksimalt konsistente utsagnsmengder om det finnes konsistente utsagnsmengder.

Teorem 19 (T;1) $\Delta \hat{e} Pt(U) \,\&\, Cons(\Delta) \rightarrow (E\Delta;1)(\Delta \text{ Inkl } \Delta;1 \,\&\, Maks;k(\Delta;1))$

§ 19 Maksimalt konsistente utsagnsmengder og fullstendige utsagnsmengder.

Klassen av fullstendige utsagnsmengder har en del trekk tilfelles med maksimalt konsistente utsagnsmengder. Vi nevner først det følgende teorem som gir to alternative karakteristikker av en fullstendig utagnsmengde:

Teorem 20 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da er de følgende betingelser ekvivalente:
(i) Comp(Δ)
(ii) $(Ew)(w \hat{e} I \,\&\, s(SNu(\Delta)) = \{w\})$
(iii) $Cons(\Delta) \,\&\, \neg(E\Delta;1)(\Delta;1 \hat{e} Pt(U) \,\&\, Cons(\Delta;1) \,\&\, k(\Delta) \text{ SInkl } k(\Delta;1))$

En teori Δ er altså fullstendig hvis og bare den uendelige konjunksjonen av Δ, SNu(Δ), har en sannhetsmengde som inneholder nøyaktig en mulig verden. Videre er Δ fullstendig hvis og bare hvis Δ er konsistent og det ikke finnes noen konsistent utsagnsmengde hvis konsekvensmengde inkluderer strengt konsekvensmengden til Δ.

Som man ser fra Teorem 17 (g) kan maksimalt konsistente mengder anses som en undermengde av mengden av fullstendige teorier. Det følgende teorem har en viss analogi med Teorem 16 og viser at det finnes en en-entydig avbildning av klassen av mulige verdener på mengden som for hver komplett teori ∏ inneholder mengden av alle de utsagnsmengder som er ekvivalente med ∏:

Teorem 21 (T;1) Sett per definisjon:
$f = Mg(\langle w, Mg(x: x \hat{e} Pt(U) \,\&\, s(SNu(x)) = \{w\})\rangle: w \hat{e} I)$
Da gjelder følgende:
(a) $f: I \text{ –(1-1,på)} \rightarrow Mg(Mg(x: LEkv;m(\Delta,x)): Comp(\Delta))$
(b) $(Aw)(w \hat{e} I \rightarrow (Ax)(x \hat{e} f(w) \rightarrow s(SNu(x)) = \{w\}))$

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Det følgende teorem oppsummerer en del andre egenskaper ved fullstendige utsagnsmengder som formodentlig er av en mindre substansiell natur:

Teorem 22 (T;1)
(a) $\Delta;1,\Delta;2 \hat{e} Pt(U) \& Comp(\Delta;i)\ (i=1,2) \& Cons(\Delta;1 U \Delta;2) \rightarrow LEkv;m(\Delta;1,\Delta;2)$
(b) $Comp(\Delta;1) \& Comp(\Delta;2) \& \Delta;1\ Inkl\ \Delta;2 \rightarrow LEkv;m(\Delta;1,\Delta;2)$
(c) $\Delta \hat{e} Pt(U) \rightarrow (Comp(\Delta) \leftrightarrow Comp(k(\Delta)))$
(d) $Comp(\Delta) \& \Delta\ Inkl\ \Delta;2 \& Cons(\Delta;2) \rightarrow Comp(\Delta;2)$
(e) $Comp(\Delta) \& x \hat{e} U \& x \hat{e} k(\Delta) \rightarrow Comp(\Delta U \{x\})$

Fra teoremet fremgår det at to komplette teorier hvis union er konsistent er ekvivalente, videre vil to teorier være ekvivalente om de begge er komplette og den ene er inkludert i den andre. Det tredje punktet i teoremet sier at en utsagnsmengde er komplett hvis og bare konsekvensmengden til den er det. Videre sier teoremet at hvis en konsistent teori $\Delta;2$ inkluderer en komplett teori Δ så er $\Delta;2$ selv komplett. Tilslutt sier det siste punktet i teoremet at hvis man utvider en fullstendig utsagnsmengde Δ med et utsagn som er en logisk konsekvens av Δ vil også utvidelsen være en fullstendig utsagnsmengde.

Teorem 23 (T;1)
(a) $\Delta \hat{e} Pt(U) \& Cons(\Delta) \rightarrow (Ex)(Comp(x) \& \Delta\ Inkl\ x)$
(b) $\Delta \hat{e} Pt(U) \& Cons(\Delta) \rightarrow (Ex)(Comp(x) \& \Delta\ Inkl\ k(x))$
(c) $Comp(\Delta) \rightarrow DCL(UN(Mg(x: LEkv;m(x,\Delta))))$
(d) $Comp(\Delta) \rightarrow Cons(UN(Mg(x: LEkv;m(x,\Delta))))$

Punkt (a) og (b) i dette teoremet har en viss likhet med Teorem 19 og sier henholdsvis at en konsistent utsagnsmengde alltid kan utvides til en komplett teori og at det finnes en komplett teori i hvis konsekvensmengde den er inkludert. De to siste punktene uttrykker at hvis Δ er en komplett teori og vi sammenfatter alle utsagn i teorier som er ekvivalente med Δ i en stor mengde, så vil denne mengden være deduktivt lukket og konsistent.

Endelig nevner vi den følgende sats om kardinaltallet til visse mengder som inneholder fullstendige utsagnsmengder:

Teorem 24 (T;1)
(a) $Mg(x: Comp(x)) \approx Pt(U)$
(b) $Comp(\Delta) \rightarrow Mg(x: LEkv;m(x,\Delta)) \approx Pt(U)$
(c) $Mg(Mg(x: LEkv;m(x,\Delta)): Comp(\Delta)) \approx I$

Man ser at denne satsen sier at klassen av komplette utsagnsmengder er likemektig med klassen av alle utsagnsmengder, videre at hvis Δ er en komplett teori så er klassen av alle de utsagnsmengder som er ekvivalente med Δ likemektig med med Pt(U). Tilslutt uttrykker punkt (c) at mengden av ekvivalensklasser av typen $Mg(x: LEkv;m(x,\Delta)$ ettersom Δ gjennomløper mengden av komplette teorier er likemektig med mengden av mulige verdener.

§ 20 Uavhengighet og streng uavhengighet.

Vårt første teorem som har med uavhengighet å gjøre angir en rekke betingelser som er ekvivalente med $Ind(\Delta)$, dvs. at Δ er en uavhengig utsagnsmengde:

Teorem 25 (T;1) Anta $\Delta \hat{e} Pt(U)$. Da er de følgende betingelser ekvivalente:

(i) Ind(Δ)
(ii) Cons(Δ) & (Ay)(yêΔ –> Cons((Δ–{y})U{Neg(y)}))
(iii) Cons(Δ) & (Ax)(xêPt(U) & x Inkl Δ –> ΔΩk(x) Inkl x)
(iv) Cons(Δ) & Mg(x: xêPt(U) & x Inkl Δ & LEkv;m(x,Δ)) = {Δ}
(v) Cons(Δ) & (Ax)(Ay)(x,y Inkl Δ & x,yêPt(U) & k(x)=k(y) –> x=y)

Igjen ser man altså at det er mulig å gi en rekke alternative definisjoner av begrepet uavhengig utsagnsmengde på samme måte som det f.eks. var tilfelle med begrepet logisk konsekvens.

Det følgende teorem angir en del mer "disparate" egenskaper ved uavhengige og strengt uavhengige utsagnsmengder:

Teorem 26 (T;1)
(a) Ind(ø)
(b) xêU –> (Ind({x}) <–> (Cons(x) & x≠t))
(c) SInd(Δ) –> Ind(Δ)
(d) (EΔ)(ΔêPt(U) & Ind(Δ) & ¬SInd(Δ))
(e) Ind(Δ) & Δ;1ê(Pt(U)ΩPt(Δ)) –> Ind(Δ;1)
(f) SInd(Δ) & Δ;1êPt(Δ) –> SInd(Δ;1)

Fra (a) fremgår det at nullmengden er en uavhengig utsagnsmengde. Punkt (b) har en viss interesse. Det er naturlig å kalle et utsagn kontingent om det er forskjellig fra det kontradiktoriske og det nødvendige utsagn. Fra punkt (b) fremgår det at et kontingent utsagn kan karakteriseres som et som oppfyller betingelsen Ind({x}). Punkt (c) og (d) sier at klassen av strengt uavhengige utsagnsmengder er en ekte del av klassen av uavhengige utsagnsmengder. Tilslutt sier punkt (f) og (g) at enhver delmengde av en uavhengig (strengt uavhengig) utsagnsmengde selv er en uavhengig (strengt uavhengig) utsagnsmengde.

På samme måte som man kan søke etter betingelser som er ekvivalente med Ind(Δ) kan man forsøke å formulere betingelser som er ekvivalente med SInd(Δ). Det følgende teorem belyser dette spørsmål:

Teorem 27 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da er de følgende betingelser ekvivalente:
(i) SInd(Δ)
(ii) (Ax)(xêPt(U) & x Inkl Δ –> Ind(Mg(Neg(y): yêx) U(Δ–x)))
(iii) (Ax)(xêPt(U) & x Inkl Δ –> Cons(Mg(Neg(y): yêx)U(Δ–x)))

Den andre av disse betingelsene sier at for enhver delmengde x av Δ så er den utsagnsmengden vi får når vi til de elementene som er med i Δ, men ikke i x føyer til negasjonene av elementene i x en uavhengig utsagnsmengde. Tilsvarende sier den tredje betingelsen at for enhver delmengde x Inkl Δ er den mengden man får når negasjonene i x legges til Δ–x konsistent. teoremet påstår som man ser at disse to betingelsene begge er ekvivalente med at SInd(Δ).

Det er lett nok å vise at (iii) er ekvivalent med (i). For å vise at (ii) er ekvivalent med (i) kan man gjøre bruk av dette forhold samt den følgende sats som kan bevises helt uavhengig av Teorem 27:

Teorem 28 (T;1) Anta Δ,∏êPt(U) og at ∏ Inkl Δ. Da gjelder:
SInd(Δ) <–> SInd(Mg(Neg(y): yê∏) U (Δ–∏))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

I en strengt uavhengig utsagnsmengde Δ vil ikke konjunksjonen av alle utsagnene i mengden logisk sett være noen konsekvens av noen ekte delmengde av Δ. Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 29 (T;1) SInd(Δ) & ∏êPt(U) & ∏ SInkl Δ –> ¬LK;m(SNu(Δ),∏)

Tilslutt skal vi nevne et teorem som gir en ytterligere karakteristikk av de strengt uavhengige utsagnsmengdene.

Anta ΔêPt(U) og at f er en funksjon som tilordner elementene i Pt(Δ) en-entydig ikke-tomme mengder av mulige verdener som er innbyrdes disjunkte. Anta videre at sannhetsmengden til ethvert utsagn x i Δ er unionen av alle de mengder som f tilordner de elementene i Pt(Δ) som inneholder x. Da kan man slutte at Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde. Omvendt er det slik at hvis Δ er en strengt uavhengig utsagnsmengde så eksisterer det en funksjon f med de egenskapene som nettopp ble nevnt. Dette er innholdet i den sats som vi har i tankene og som formuleres slik:

Teorem 30 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da er de følgende to betingelser ekvivalente:
(i) SInd(Δ)
(ii) (Ef)(f: Pt(Δ) –(1-1)–> Pt(I) &
(Ax)(Ay)(x,yêDom(f) & x≠y –> (f(x)Ωf(y)=ø & f(x)≠ø)) &
(Ax)(xêΔ –> s(x)= UN(Mg(f(y): yêPt(Δ) & xêy))))

Av de setningene om strengt uavhengige utsagnsmengder som er nevnt er denne den mest substansielle. Teoremet er svært nyttig når man ønsker å konstruere uavhengige utsagnsmengder med forskjellige egenskaper.

§ 21 Om operasjonene C og C;f.

C er den operasjonen som til en utsagnsmengde Δ tilordner den minste utsagnsmengden som inneholder Δ og som er lukket under negasjon og uendelig konsjunksjon, dvs. operasjonen SNu. Er derfor Δ en utsagnsmengde inneholder C(Δ) selvfølgelig mengden Δ og dessuten Neg(x) om den inneholder x, og SNu(∏) om ∏êPt(C(Δ)). Videre er det slik at C(Δ;1) inkl C(Δ;2) om Δ;2 er en utsagnsmengde som inneholder utsagnsmengden Δ;1, og at C anvendt på C(Δ) gir som resultat denne mengden selv. Tilsvarende setninger gjelder om C;f om vi erstatter uendelig konjunksjon med endelig konjunksjon. Disse elementære observasjonene er formalisert i det følgende teorem:

Teorem 31 (T;1)
(a) ΔêPt(U) –> Δ Inkl C(Δ) Inkl U
(b) ΔêPt(U) –> (Ax)(xêC(Δ) –> Neg(x)êC(Δ))
(c) ΔêPt(U) –> (Ax)(xêPt(U) & x Inkl C(Δ) –> SNu(x)êC(Δ))
(d) ΔêPt(U) –> C(C(Δ)) = C(Δ)
(e) Δ;1,Δ;2êPt(U) & Δ;1 Inkl Δ;2 –> C(Δ;1) Inkl C(Δ;2)
(f) ΔêPt(U) –> Δ Inkl C;f(Δ)
(g) ΔêPt(U) –> (Ax)(xêC;f(Δ) –> Neg(x)êC;f(Δ))
(h) ΔêPt(U) –> (Ax)(Ay)(x,yêC;f(Δ) –> K(x,y)êC;f(Δ))
(i) ΔêPt(U) –> C;f(C;f(Δ)) = C;f(Δ)

Vi bemerker også at C;f(Δ) Inkl C(Δ) om ΔêPt(U) og at man har C;f(C(Δ)) = C(Δ). Det er også tilfelle at C anvendt på C;f(Δ) gir som resultat C(Δ). Videre er det også mulig å vise at

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

hvis Δ er en endelig utsagnsmengde så er såvel C(Δ) som C;f(Δ) endelige og det vil også være slik at C(Δ) og C;f(Δ) er identiske om Δ er endelig.

De følgende forhold kan også være verdt å nevne: Er xêC;f(Δ) finnes det altid en endelig delmengde ∏ av Δ slik at xêC;f(∏). Er Δ videre en maksimalt konsistent utsagnsmengde eller f. eks. mengden Mg(s;-1({w}): wêI) så har man at C(Δ) = U. Tilslutt nevnes at det finnes en uavhengig utsagnsmengde Δ slik at C(Δ) = U, dvs. som er slik at hvis operasjonen C anvendes på Δ får man mengden av alle utsagn.

Observasjonene ovenfor kan sammenfattes i den følgende sats:

Teorem 32 (T;1)
(a) ΔêPt(U) –> C;f(Δ) Inkl C(Δ)
(b) ΔêPt(U) –> C;f(C(Δ)) = C(Δ)
(c) ΔêPt(U) –> C(C;f(Δ)) = C(Δ)
(d) ΔêPt(U) & Cd(Δ) <Aleph;0 –> Cd(C;f(Δ))< Aleph;0
(e) ΔêPt(U) & Cd(Δ) <Aleph;0 –> Cd(C(Δ)) < Aleph;0
(f) ΔêPt(U) & Cd(Δ) < Aleph;0 –> C(Δ) = C;f(Δ)
(g) ΔêPt(U) & xêC;f(Δ) –> (E∏)(∏êPt(U) & Cd(∏)< Aleph;0 & ∏ Inkl Δ & xêC;f(∏))
(h) Δ=Mg(s;-1({w}): wêI) –> C(Δ)=U
(i) Maks;k(Δ) –> C(Δ) = U
(j) (EΔ)(Ind(Δ) & C(Δ) =U)

Tilslutt nevner vi de følgende to normalform-teoremer for C(Δ) og C;f(Δ). Disse er svært anvendelige og kan brukes ved løsningen av en rekke problemer hvor C(Δ) og C;f(Δ) er involvert. Som man ser angir de tilstrekkelige og nødvendige vilkår for medlemskap i C(Δ) og C;f(Δ) og gir en derfor alternative karakteristikker av disse mengdene:

Teorem 33 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da er de følgende to betingelser ekvivalente:
(i) xêC(Δ)
(ii) (E∏)[∏êPt(Pt(Δ)) & x = UNu(Mg(y: (EX)(Xê∏ & y= K(SNu(Mg(Neg(r): rêX)), SNu(Δ–X)))))]

For C;f(Δ) har man at det følgende, helt analoge, teorem holder:

Teorem 34 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da er de følgende to betingelser ekvivalente:
(i) xêC;f(Δ)
(ii) (EΔ;1)(Δ;1êPt(U) & Cd(Δ;1)<Aleph;0 & (E∏)[∏êPt(Pt(Δ;1)) & x = UNu(Mg(y: (EX)(Xê∏ & y= K(SNu(Mg(Neg(r): rêX)), SNu(Δ;1–X)))))])

La oss knytte noen kommentarer til disse teoremene.

Det er tilstrekkelig å kommentere Teorem 33. Anta Δ er en utsagnsmengde ie. ΔêPt(U) og at X Inkl Δ. Man kan da først danne mengden av alle negasjonene av utsagn i X dvs. Mg(Neg(r): rêX). Dernest kan man ta konjunksjonen av alle utsagnene i denne mengden: SNu(Mg(Neg(r): rêX)). På den annen side kan vi også danne konjunksjonen av de elementer i Δ som blir igjen etter at man har fjernet dem i X, nemlig SNu(Δ–X). La oss akkurat her kalle konjunksjonen av SNu(Mg(Neg(r): rêX)) og SNu(Δ–X) for kn(X) dvs. at vi setter:

kn(X) = K(SNu(Mg(Neg(r): rêX)),SNu(Δ–X))

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Er nå ∏ en mengde av delmengder av Δ kan vi se på unionen av de diverse kn(X) ettersom X gjennomløper ∏. Dette vil da i følge teoremet være et utsagn i C(Δ). Omvendt – og det er mindre trivielt – har vi, forutsatt at xêC(Δ) at det finnes en slik mengde ∏ av delmengder av Δ hvor x er unionen av de diverse kn(X) ettersom X gjennomløper ∏, dvs. hvor man har x =UNu(Mg(kn(X): Xê∏). Det er disse to påstander som er innholdet i Teorem 33. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med Teorem 34. Når det gjelder bevisene for Teorem 33 og Teorem 34 nevner vi bare at begge satsene bevises ved induksjon, henholdsvis på C(Δ) og C;f(Δ).

§ 22 Om den ordinale og kardinale fullstendighetsgraden til utsagnsmengder.

Avslutningsvis vil vi se nærmere på noen setninger om den kardinale og ordinale fullstendighetsgraden til utsagnsmengder. Når det gjelder kardinal- og ordinal fullstendighetsgrad minner vi om at disse begrepene ble definert i §12. Her vil vi utelukkende studere kardinal - og ordinal fullstendighetsgrad relativt til systemet <U,k>. Noen viktige egenskaper til disse begrepene er sammenfattet i det følgende teorem:

Teorem 35 (T;1) (a) Er ΔêPt(U) gjelder følgende:
g;<U,k>(Δ) = Cd(Pt(s(SNu(Δ))))
(b) Er nêN og ΔêPt(U) har man at følgende påstand holder:
G;<U,k>(Δ) = n+1 <–> Cd(s(SNu(Δ))) = n
(c) Er ΔêPt(U) og aêOn gjelder:
G;<U,k>(Δ) = Aleph;(a+1) <–> Cd(s(SNu(Δ))) = Alpeh;a

De delsetningene som inngår i dette teoremet gir en karakteristikk av henholdsvis den kardinale og den ordinale fullstendighetsgraden til en teori Δ. Vi minner om at g;<U,k>(Δ) er den kardinale fullstendighetsgraden til Δ relativt til systemet <U,k> og at G;<U,k>(Δ) er den ordinale fullstendighetsgraden relativt til det samme system. For å finne den kardinale fullstendighetsgraden til Δ behøver vi i følge punkt (a) bare å bestemme kardinaltallet til potensmengden til s(SNu(Δ)) hvor s(SNu(Δ)) er sannhetsmengden til snittet av utsagnene i Δ. Tilsvarende behøver vi i lys av punkt (b) og (c) bare å bestemme kardinaltallet til s(SNu(Δ)) for å fiksere den ordinale fullstendighetsgraden til Δ. Denne grad vil da være kardinaltallet som kommer umiddelbart etter kardinaltallet til s(SNu(Δ)) i rekken av kardinaltall ordnet etter størrelse. Dette gjelder hva enten s(SNu(Δ)) inneholder endelig eller uendelig mange elementer. I praksis vil det imidlertid by på store vanskeligheter å bestemme disse fullstendighetsdgradene for naturlig gitte teorier. Teoremene ovenfor har derfor utelukkende en helt teoretisk interesse.

Vi nevner også noen satser som nokså lett kan utledes ved hjelp av Teorem 35:

Teorem 36 (T;1) Anta Cd(I) = Aleph;a & aêOn. Da gjelder:
(a) (AΔ)(ΔêPt(U) –> Aleph;(a+1) ≥ G;<U,k>(Δ) ≥1
(b) (AΔ)(ΔêPt(U) –> Cd(2^(Aleph;a)) ≥ g;<U,k>(Δ) ≥1

Som man ser ligger den kardinale fullstendighetsgraden til en utsagnsmengde mellom Cd(2^(Aleph;a)) og 1 om kardinaltallet til mengden av mulige verdener er Aleph;a (for noe ordinaltall a). Tilsvarende ligger den ordinale fullstendig-hetsgraden mellom Aleph;(a+1) og 1 under de samme forutsetninger.

Den følgende sats har også en viss interesse:

Teorem 37 (T;1) ¬(EΔ)(ΔêPt(U) & G;<U,k>(Δ) = Aleph;0)

Mao. kan det ikke finnes noen utsagnsmengde Δ hvor den ordinale fullstendighetsgraden er Aleph;0. Grunnen er denne: Det er to muligheter vedrørende s(SNu(Δ)). Enten er denne mengden endelig og da har man Cd(s(SNu(Δ))) = n for noe naturlig tall n. I følge Teorem 35 er da:

G;<U,k>(Δ) =(n+1) < Aleph;0

Eller så er s(SNu(Δ)) uendelig, dvs. at Cd(s(SNu(Δ))) ≥ Aleph;0. Men da har vi –igjen ved hjelp Teorem 35 – at G;<U,k>(Δ) =Aleph;(a+1) > Aleph;a. Dette viser at setningen holder.

Er Δ;1 en teori som logisk sett er svakere enn Δ;2 vil den kardinale, såvel som den ordinale, fullstendighetsgraden til Δ;1 ikke kunne overstige den til Δ;2. Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 38 (T;1) Δ;1,Δ;2êPt(U) & Δ;1 Inkl k(Δ;2) –>
G;<U,k>(Δ;1) ≤ G;<U,k>(Δ;2) & g;<U,k>(Δ;1) ≤ g;<U,k>(Δ;2)

Det følgende teorem karakteriserer fullstendighetsgradene til enhetsmengdene som inneholder henholdsvis det nødvendige utsagn, t, og det kontradiktoriske utsagn, k. Det viser at {t} har maksimalt liten fullstendighetsgrad og at {k} har maksimalt stor fullstendighetsgrad:

Teorem 39 (T;1) Anta aêOn & Cd(I) = Aleph;a. Da gjelder:
(a) G;<U,k>({t}) = Aleph;(a+1) & G;<U,k>({k}) = 1
(b) g;<U,k>({t}) = Cd(2^(Aleph;a)) & g;<U,k>({k}) = 1

Fra dette teoremet ser man at de konsistente utsagnsmengder må ha en fullstendighetsgrad som er større enn 1.

Man kan vise at fullstendighetsgraden til de maksimalt konsistente mengene, hva enten det dreier seg om kardinal eller om ordinal fullstendighetsgrad, alltid er lik 2. Er en teori konsistent, men ikke maksimalt konsistent må den følgelig ha en ordinal og en kardinal fullstendighetsgrad som ≥ 3. Disse iaktagelsene er sammenfattet i vårt siste teorem som formuleres på den følgende måte:

Teorem 40 (T;1) Anta ΔêPt(U). Da gjelder:
(a) Maks;k(Δ) –> G;<U,k>(Δ)=2
(b) Cons(Δ) & ¬Maks;k(Δ) –> G;<U,k>(Δ) ≥3
(c) Maks;k(Δ) –> g;<U,k>(Δ)=2
(d) Cons(Δ) & ¬Maks;k(Δ) –> g;<U,k>(Δ) ≥3

Vi kunne nå ha gått videre og kommentert en rekke andre setninger i denne forbindelse. Men et sted må man likevel stanse og vi setter sluttstreken her.

****

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.* , Maskinskrevet manuskript, 1986
Rognes [5], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [6], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om presise deskriptive utsagn og egenskaper*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [7], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Upublisert manuskript, 1985
Shoenfield [1], Shoenfield, J.R. , "Mathematical Logic", Addison Wesley, 1967
Tarski [1], Tarski, Alfred, *Fundamental Concepts of the Methodology of deductive sciences,* I "Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938. Oversatt av J. H. Woodger, Oxford, Clarendon Press, 1956.

***

© Morten Rognes 2002 v1.00 -

Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 2002. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg inneholde denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk* .

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid, på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, dato og årstall for nedlasting, samt det versjonsnummeret som er angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære", 1985, Upublisert, http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-2002, v1.00.